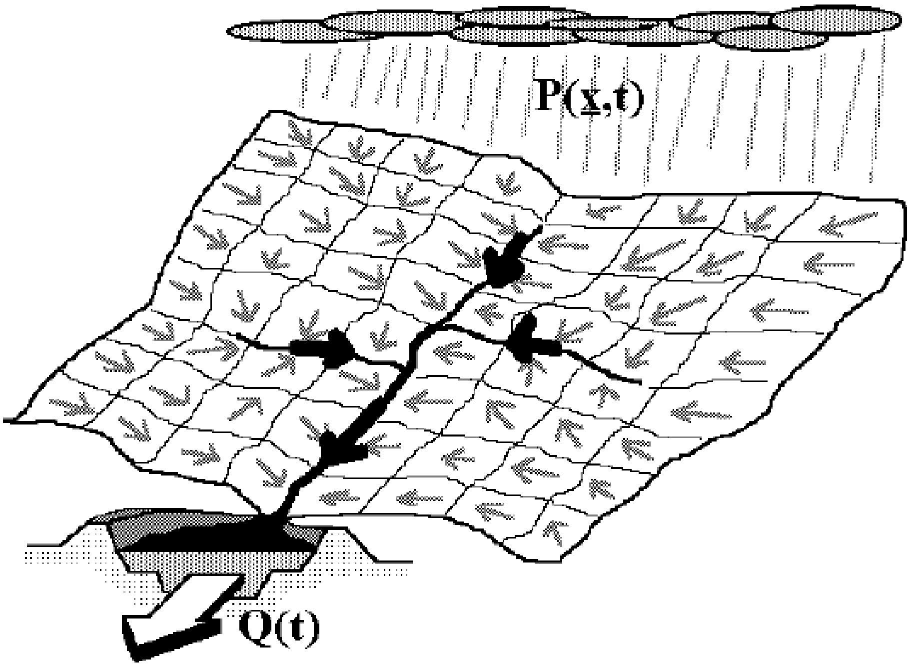
Università della Calabria

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Civile

CORSO DI IDROLOGIA N.O. **Prof. Pasquale Versace**



SCHEDA DIDATTICA N°16

MODELLI DI TRASFORMAZIONE AFFLUSSI-DEFLUSSI

A.A. 2010-11

I modelli di trasformazione afflussi-deflussi

I modelli di formazione dei deflussi si propongono di fornire una descrizione matematica dei processi idrologici che si svolgono nel bacino idrografico, considerandolo, in analogia alla teoria dei sistemi, come un sistema (*sistema prototipo*) soggetto ad un ingresso, l'intensità di pioggia, e ad un'uscita (o risposta) rappresentata dall'andamento della portata nel tempo q(t) defluente attraverso la sezione di chiusura.

Data la complessità dei fenomeni e delle relazioni che influenzano e descrivono il comportamento reale di un bacino, si introduce un sistema modello che ne approssima il comportamento reale attraverso alcune semplificazioni. La grande varietà di modelli di trasformazione afflussi-deflussi disponibili in letteratura si può classificare in base a diversi criteri.

Modelli completi e modelli a valenza limitata

Una prima distinzione, in base al grado di completezza della schematizzazione e della descrizione dei fenomeni che intervengono nel ciclo idrologico, può essere fatta tra modelli completi e modelli ad equivalenza limitata. I *modelli completi* sono concepiti per rappresentare il comportamento del bacino idrografico per un periodo prolungato in cui si manifestano tutte le possibili situazioni idrologiche e, perciò, in genere, tengono conto dell'intero complesso della trasformazione afflussi-deflussi, simulando ciascun processo fisico del ciclo idrologico.

I *modelli a valenza limitata* simulano, invece, il comportamento del bacini solo in occasione di eventi di natura particolare. In questa categoria ricadono, ad esempio, i *modelli di piena*, concepiti, appunto, per la simulazione delle piene fluviali. Durante un evento di questo genere si ritengono trascurabili alcuni fenomeni del ciclo idrologico, per cui la struttura del modello risulta più semplice di quella di un modello di tipo completo. L'evapotraspirazione e l'intercezione vegetale risultano in genere irrilevanti rispetto agli altri termini del bilancio idrologico così come la componente superficiale ha una importanza preponderante rispetto alle altre forme di deflusso.

In questa visione il fenomeno di piena risulta dovuto essenzialmente a quella parte di precipitazione (pioggia netta), che non essendosi infiltrata dà luogo allo scorrimento sui versanti (scorrimento superficiale) e quindi raggiunge la rete idrografica. Il volume di controllo con cui si identifica il bacino si riduce a quello che comprende la rete idrografica ed ha base coincidente con la superficie del suolo.

Classificazione in base alla struttura del modello

In relazione alla loro struttura i modelli idrologici di trasformazione afflussi-deflussi possono essere classificati in:

- *Modelli idraulici o a simulazione particolareggiata*: sulla base di osservazioni sperimentali e di modelli analitici tentano di simulare i singoli processi idrologici che vengono poi collegati da opportune relazioni matematiche.
- *Modelli concettuali*: assimilano la trasformazione reale delle piogge in portate ad un'altra, riferita ad un sistema fisico, anche diverso, ma in grado di fornire una risposta simile. In questa categoria è possibile inquadrare modelli aventi strutture anche molto differenti: si possono identificare sia modelli molto articolati, simili a modelli idraulici, sia modelli come quelli lineari parametrici, di struttura semplice, vicina a quella dei modelli sintetici.
- *Modelli sintetici (o a scatola chiusa o empirici)*: non si propongono di rappresentare i processi idrologici e i fenomeni fisici che intervengono nella trasformazione afflussi-deflussi né fisicamente né matematicamente. Essi considerano il sistema come una scatola chiusa (black box) sulla quale non viene fatta alcuna ipotesi. La modellazione, perciò, si esaurisce nella ricerca di un operatore matematico che leghi tra loro, nel miglior modo possibile, ingresso ed uscita del sistema, ovvero l'afflusso meteorico con la portata defluente alla sezione di chiusura del bacino idrografico.

Modelli distribuiti e concentrati

La variabilità spaziale e temporale della intensità di pioggia, così come delle caratteristiche geopedologiche e morfologiche del bacino, ha una notevole influenza sulla risposta del sistema; in base a come queste grandezze vengono considerate, in particolare alle caratteristiche dell'ingresso, possiamo distinguere due tipi di approccio: distribuito e globale.

Nei *modelli globali o concentrati*, al reale ingresso $i(x,y,t)$ variabile nel tempo e nello spazio, viene sostituito un ingresso non distribuito $i(t)$ pari al valore medio spaziale

$$i(t) = \frac{1}{A} \int_x \int_y i(x, y, t) dxdy$$

Il sistema modello deve essere tale da reagire ad un'immissione uniformemente distribuita nello spazio, $i(t)$, con una risposta $q(t)$ che si accordi in maniera accettabile con quella del bacino reale sul quale la pioggia si verifica con una distribuzione spaziale.

La crescente disponibilità di mezzi di calcolo sempre più evoluti e potenti, ha indirizzato la ricerca verso lo sviluppo di *modelli matematici di tipo distribuito,* nei quali la rappresentazione delle grandezze relative agli ingressi ed alle caratteristiche del bacino può essere assunta variabile nel tempo e nello spazio. Nella modellazione matematica viene effettuata una discretizzazione individuando celle elementari all'interno delle quali tali caratteristiche vengono ritenute uniformi.

L'idrogramma unitario (UH)

I modelli di trasformazione afflussi-deflussi a base concettuale ed a valenza limitata predisposti per la stima dei deflussi di piena sono in genere modelli lineari e stazionari che si prestano a rappresentare la sola componente superficiale del deflusso.

Un sistema si dice lineare se vale la sovrapposizione degli effetti, cioè se agli ingressi $p_1(t)$ e $p_2(t)$ corrispondono rispettivamente le uscite $q_1(t)$ e $q_2(t)$ allora all'ingresso $\alpha\, p_1(t)+ \beta\, p_2(t)$ corrisponde l'uscita $\alpha\, q_1(t)+ \beta\, q_2(t)$.

Un sistema è invece stazionario se dato un ingresso $p(t)$ cui corrisponde un l'uscita $q(t)$ allora all'ingresso $p(t+T)$ corrisponde l'uscita $q(t+T)$.

I primi modelli lineari e stazionari si basavano sul concetto dell'idrogramma unitario *UH* introdotto da *Sherman (1932)*. L'assunzione fondamentale è che l'idrogramma corrispondente ad una certa pioggia netta, con altezza e durata assegnata, intensità costante nel tempo ed uniforme nello spazio, sia sempre lo stesso. Per maggiore chiarezza invece dell'intensità di pioggia consideriamo la portata di afflusso al bacino, pari al prodotto dell'intensità di pioggia netta per l'area del bacino.

In particolare si consideri un volume unitario di pioggia di arbitraria durata T.

Nota la risposta del sistema ad un ingresso elementare di questo tipo, la risposta ad un qualsivoglia input pluviometrico può ottenersi tramite il principio di sovrapposizione degli effetti combinando per somma (linearità) e traslazione (stazionarietà) lungo l'asse dei tempi l'operatore che trasforma le piogge in portate.

La figura 1 mostra:

- la risposta ad un ingresso unitario elementare;
- la risposta ad un ingresso di intensità doppia rispetto a quello elementare;
- la risposta ad un ingresso elementare traslato di t_1.

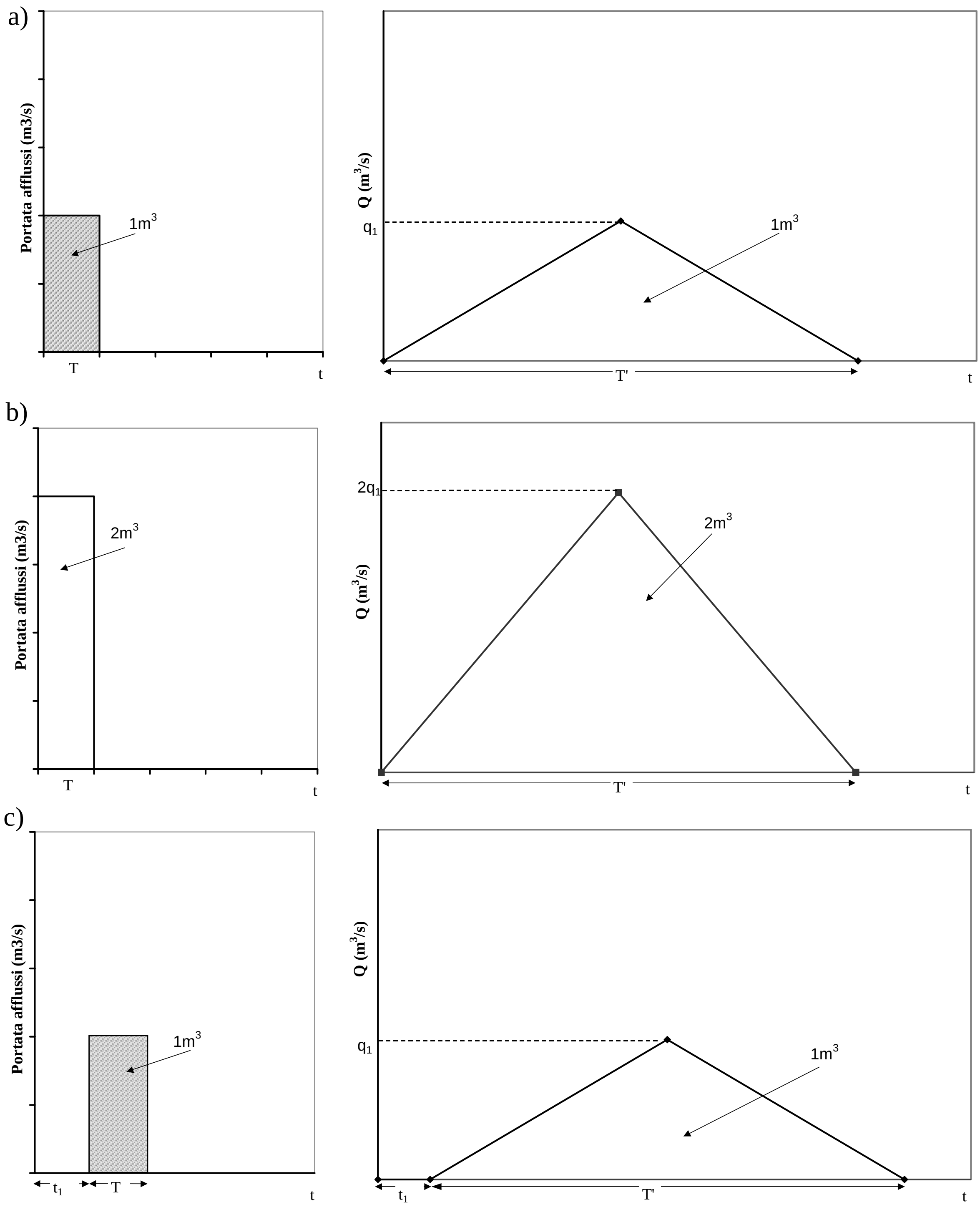
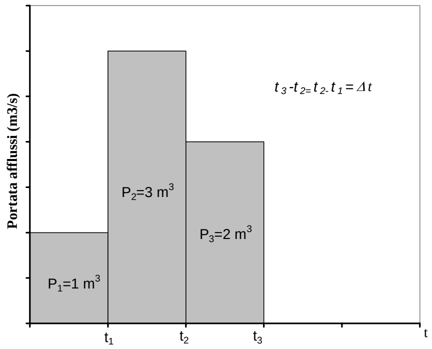
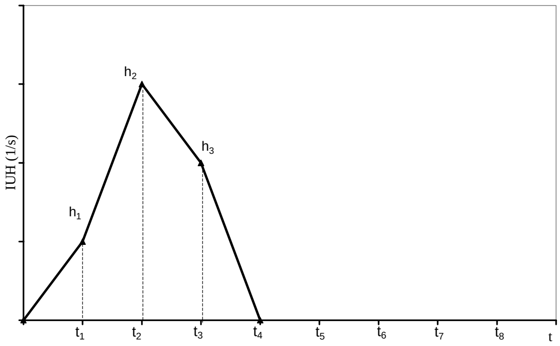


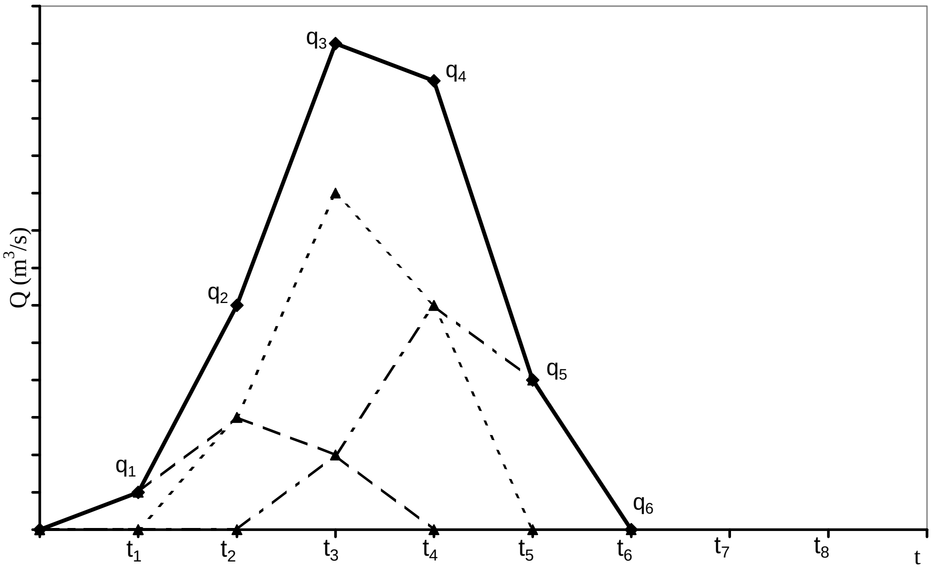
Figura 1 – Idrogramma Unitario: a) risposta ad un ingresso unitario elementare; b) risposta ad un ingresso di intensità doppia rispetto a quello elementare; c) risposta ad un ingresso elementare traslato di t_1

Esempio 1

Si consideri l'ingresso caratterizzato da tre intervalli di pioggia rispettivamente di 1, 3, e 2 m^3. L'idrogramma unitario osservato per una pioggia di 1 m^3 , discretizzato nello stesso intervallo di tempo Δt delle piogge, è riportato di fianco.







Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti è possibile determinare l'idrogramma in uscita che risulta :

$q(0) = 0$
$q(t_1) = q_1 = P_1h_1$

$q(t_2) = q_2 = P_1h_2 + P_2h_1$

$q(t_3) = q_3 = P_1h_3 + P_2h_2 + P_3h_1$

$q(t_4) = q_4 = P_2h_3 + P_3h_2$

$q(t_5) = q_5 = P_3h_3$

$q(t_6) = q_6 = 0$

L' idrogramma unitario istantaneo (IUH)

L'*idrogramma unitario istantaneo (IUH),* è nato storicamente solo molto dopo ma può considerarsi una sorta di perfezionamento dell'*UH.*

L’idrogramma unitario istantaneo *h(t)* rappresenta la risposta del sistema (cioè l’idrogramma di piena) conseguente ad una precipitazione netta di volume unitario e di durata infinitesima (e conseguentemente di intensità infinita) avente cioè le caratteristiche di una immissione impulsiva. Un input di questo genere viene indicato come delta di Dirac ed ha le seguenti caratteristiche:

$\delta(t) = 0$ per $t \neq 0$

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$$

Dovendo valere l’equazione di continuità (volume complessivo di pioggia netta = volume defluente) deve essere :

$$\int_{0}^{\infty} h(t)dt = 1$$

cioè l’area sottesa dall’ IUH deve avere valore unitario e pertanto h(t) ha come dimensione l’inverso di un tempo.

La generica pioggia, di durata finita, può essere interpretata come una successione di precipitazioni nette elementari di durata infinitesima $d\tau$ e volume, anch’esso infinitesimo, pari a $p(\tau)d\tau$.

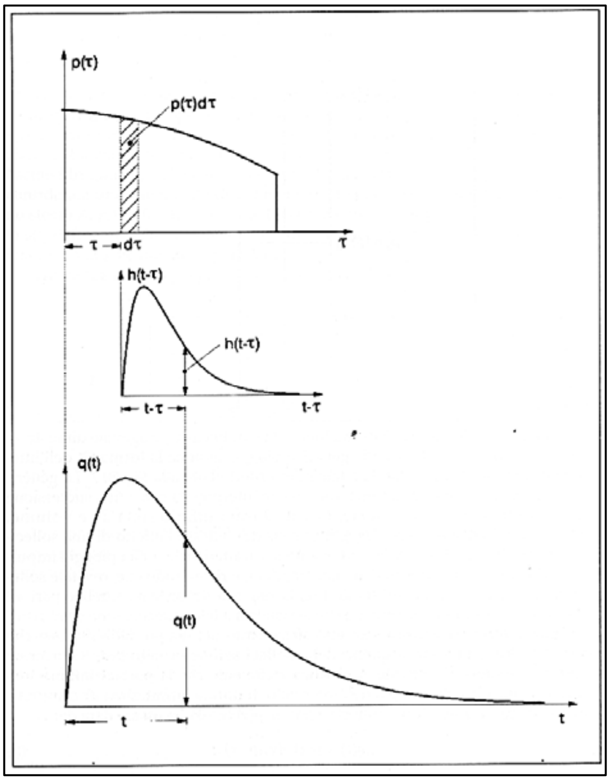
Si consideri l’effetto nell’istante *t* di una sollecitazione applicata all’istante τ ed avente le caratteristiche di una pioggia impulsiva. Tale effetto sarà pari ad *h(t- τ),* dove con *h* si indica l’ordinata dell’ operatore idrogramma unitario istantaneo.

Ricorrendo all’ipotesi di linearità, si verifica che la portata infinitesima *dq(t),* dovuta alla sola pioggia dell’intervallo infinitesimo $d\tau$ compreso fra τ e $\tau+d\tau$, il cui volume è pari a $p(\tau)d\tau$, risulta essere data da:

$$dq(t)= h(t- \tau)p(\tau)d\tau$$

La risposta del sistema al tempo *t* si ottiene quindi sovrapponendo gli effetti delle piogge nette che si sono verificate fra l’istante iniziale *t=0* e l’istante *t* considerato, sommando cioè tutti i contributi infinitesimi *dq(t).* Si ha quindi:

$$q(t) = \int_0^t dq(t) = \int_0^t p(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



Riassumendo, supponendo che la trasformazione afflussi-deflussi del bacino sia assimilabile a quella di un sistema lineare e stazionario, la relazione tra le portate entranti nel sistema idrografico - cioè le precipitazioni, $p(t)$ ed il deflusso $q(t)$ attraverso la sezione di chiusura risulta esprimibile tramite l'espressione precedente indicata come integrale di convoluzione.

La durata totale T dell'idrogramma così ottenuto risulta pari alla somma della durata T_p dell'evento meteorico e della durata T_h dell'IUH (che si può assimilare al tempo di corrivazione del bacino). L'ascissa del baricentro dell'IUH rappresenta invece il cosiddetto tempo di ritardo del bacino.

Il calcolo delle portate viene operativamente eseguito discretizzando l'integrale di convoluzione. In particolare, fissato un intervallo temporale di riferimento Δt, vengono in primo luogo campionate le funzioni $q(t)$ e $p(t)$ ad intervalli equispaziati di Δt. Così operando conviene indicare con $q(t_k)$ la portata da stimare nella sezione di chiusura all'istante $k \cdot \Delta t$, e con $p(k)$ la (portata di) precipitazione, supposta costante nell'intervallo $[(k-1)\cdot\Delta t,\ k\cdot\Delta t]$.

Con tale campionamento la portata calcolata $q(t_k)$ all'istante $k{\cdot}\Delta t$ in base all'integrale di convoluzione può essere espressa dalla sommatoria:

$$q(t_k) = \sum_{i=1}^{k} p(i)A(k+1-i)$$

con $A(k+1-i) = \int_{(k-i)\Delta t}^{(k+1-i)\Delta t} h(t)dt$.

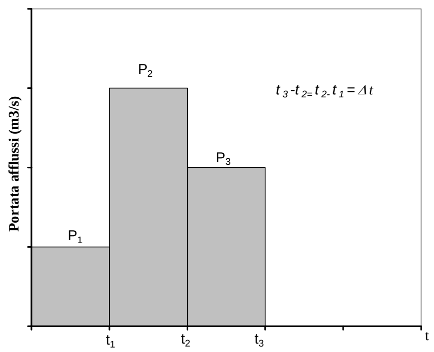
In alternativa si può considerare il generico A_j come

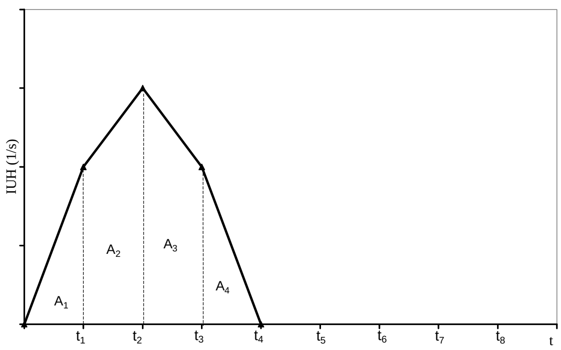
$$A_j = \frac{h(t_j) + h(t_{j-1})}{2}\Delta t$$

Naturalmente per la continuità deve risultare $\sum_{j=1}^{N} A_j = 1$

Esempio 2

Si consideri lo stesso ingresso dell'esempio 1. In questo caso con P_1, P_2 e P_3 sono state indicate le portate affluenti (m^3/s). A fianco si riporta l'idrogramma unitario istantaneo discretizzato nello stesso intervallo di tempo Δt delle piogge, corrispondente ad un ingresso del tipo impulso di Dirac.





Applicando la forma discretizzata dell'integrale di convoluzione è possibile determinare l'idrogramma in uscita che risulta :

$q(0) = 0$

$q(t_1) = \int_0^{t_1} P_1 h(t_1 - \tau)d\tau = P_1A_1$

$$q(t_2) = \int_0^{t_1} P_1 h(t_2 - \tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} P_2 h(t_2 - \tau) d\tau = P_1A_2 + P_2A_1$$

$q(t_3) = P_1A_3 + P_2A_2 + P_3A_1$

$q(t_4) = P_1A_4 + P_2A_3 + P_3A_2$

$q(t_5) = P_2A_4 + P_3A_3$

$q(t_6) = P_3A_4$

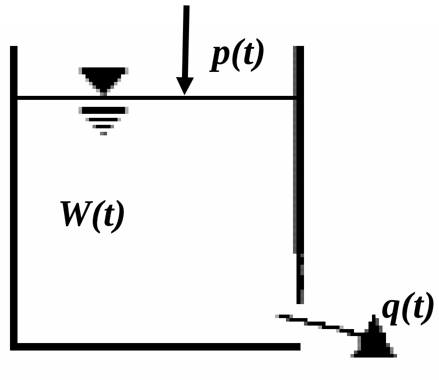
$q(t_7) = 0$

Effettivamente il sistema perde memoria dell'evento meteorico considerato ad un tempo T ($=7\Delta t$) pari alla somma della durata T_p ($=3\Delta t$) dell'evento meteorico e della durata T_h($=4\Delta t$) dell'IUH.
Si noti come nonostante le durate dell'evento e dell'IUH considerato siano uguali a quelle considerate per l'evento e l'UH dell'esempio 1, la durata dell'idrogramma ottenuto risulta inferiore di un intervallo di tempo. Questo perché l'UH fa riferimento ad un ingresso di durata finita, in questo caso Δt, mentre l'IUH considera un ingresso di durata infinitesima.

Il modello del serbatoio lineare

Indicando con *W(t)* il volume invasato nel serbatoio all'istante *t*, con *p(t)* la portata di afflusso e con *q(t)* quella di deflusso, per un serbatoio deve ovviamente valere l'equazione di continuità:

$$\frac{dW(t)}{dt} = p(t) - q(t)$$



Il serbatoio viene considerato lineare nel senso che esiste una relazione di proporzionalità tra volume invasato e portata in uscita dal serbatoio:

$$W(t) = k\, q(t)$$

in cui k ha le dimensioni di un tempo ed è una costante caratteristica del serbatoio.

Sostituendo nell'equazione di continuità si ha:

$$k\frac{dq(t)}{dt} = p(t) - q(t)$$

Questa equazione si può risolvere molto semplicemente; dividendo per k e moltiplicando per $e^{t/\kappa}$ entrambi i membri, infatti, si ottiene:

$$e^{t/k}\frac{dq(t)}{dt} + e^{t/k}\frac{q(t)}{k} - e^{t/k}\frac{p(t)}{k} = 0$$

che si può anche scrivere nella forma:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{t/k}q(t)\right] = e^{t/k}\frac{p(t)}{k}$$

Integrando tra zero e t e sviluppando si ottiene:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left[e^{\tau/k}q(\tau)\right]d\tau = \int_0^t e^{\tau/k}\frac{p(\tau)}{k}d\tau$$

$$\left[e^{\tau/k}q(\tau)\right]_0^t = \int_0^t e^{\tau/k}\frac{p(\tau)}{k}d\tau$$

$$q(t)e^{t/k} - q(0) = \int_0^t e^{\tau/k}\frac{p(\tau)}{k}d\tau$$

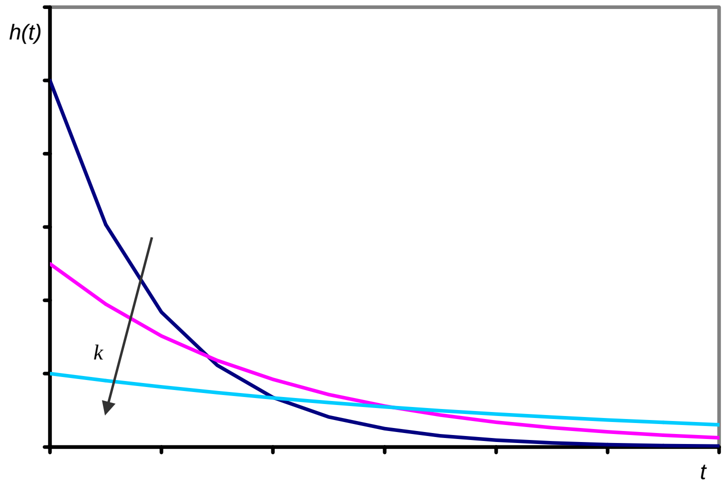
Imponendo $q(0) = 0$ poiché si stanno considerando solo i deflussi superficiali, l'espressione precedente diventa:

$$q(t) = \int_0^t \frac{1}{k}e^{\frac{-(t-\tau)}{k}}p(\tau)d\tau$$

Dal confronto con l'integrale di convoluzione, $q(t) = \int_0^t h(t-\tau)\,p(\tau)d\tau$ si riconosce immediatamente l'espressione dell'idrogramma unitario istantaneo del serbatoio lineare:

$$h(t) = \frac{1}{k}e^{-\frac{t}{k}}$$

Al crescere di *k* aumenta l'effetto di laminazione del serbatoio, per cui il picco della portata in uscita tende a diminuire ed il rilascio del volume d'acqua entrato nell'invaso tende a protrarsi nel tempo (l'area sottesa dall'IUH deve risultare sempre pari ad 1).



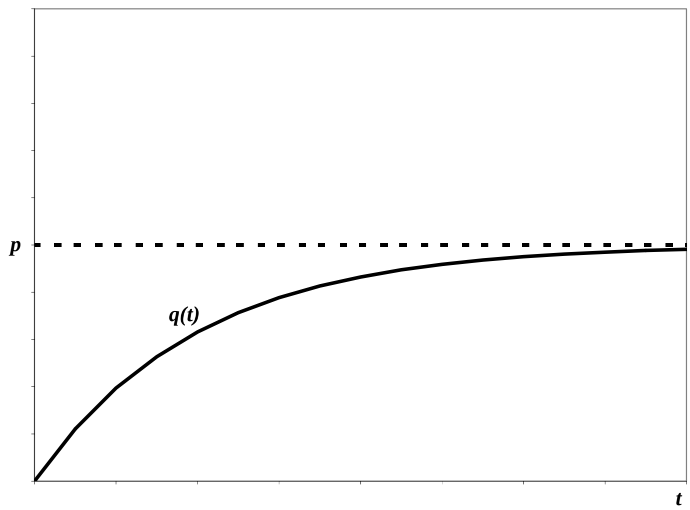
Esempio 3

Si consideri una pioggia costante di durata infinita

p(t) = *p* = cost. $\quad \forall t \geq 0$

Applicando l'integrale di convoluzione si determina la portata in uscita come segue:

$$q(t) = \frac{p}{k}\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{k}}d\tau = \frac{p}{k}e^{-\frac{t}{k}}\int_0^t e^{\frac{\tau}{k}}d\tau = \frac{p}{k}e^{-\frac{t}{k}}\left[ke^{\frac{\tau}{k}}\right]_0^t = \frac{p}{k}e^{-\frac{t}{k}}\left[ke^{\frac{t}{k}} - k\right] = p\left[1 - e^{-\frac{t}{k}}\right]$$



Esempio 4

Si consideri ora una pioggia costante di durata pari a T.

p(t) = *p* = cost. $\quad 0 \le t \le T$

p(t)=0 $\quad t > T$

La portata fino all'istante T ha l'andamento descritto dalla legge determinata all'esempio precedente. In particolare per $t = T$ si ha:

$$q(T) = p\left[1 - e^{-\frac{T}{k}}\right]$$

A partire dall'istante T in cui cessa la pioggia si può dimostrare che la portata diminuisce esponenzialmente.

Per $t > T$ l'equazione di continuità, poichè $p(t) = 0$, diventa:

$$q(t) = -k\frac{dq}{dt}$$

Risolvendo rispetto a *t* si ha:

$$dt = -k\frac{dq}{q}$$

$$t = -k\ln[q(t)] + C$$

E' possibile eliminare la costante di integrazione considerando che per $t = T$ la $q(t) = q(T)$, per cui:

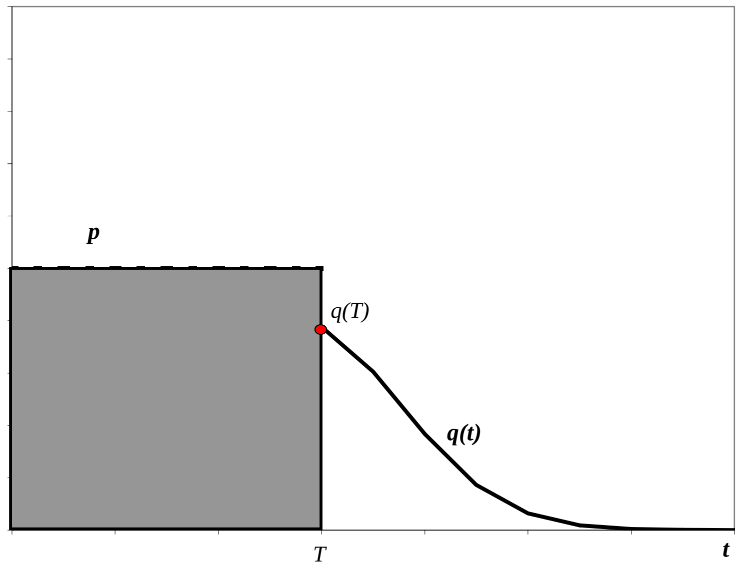
$$T = -k\ln[q(T)] + C$$

Sottraendo membro a membro si ha:

$$t - T = -k\ln\left[\frac{q(t)}{q(T)}\right]$$

ottenendo facilmente l'espressione della portata per t > T

$$q(t) = q(T)e^{-\frac{(t-T)}{k}}$$



Naturalmente si perviene allo stesso risultato applicando l'integrale di convoluzione.

Il modello del canale lineare

Il modello del canale lineare rappresenta in modo schematico il fenomeno della traslazione del deflusso nella rete idrografica del bacino ipotizzando semplicemente un ritardo dell'uscita rispetto all'ingresso.

L'idrogramma unitario istantaneo di un canale lineare è pertanto rappresentabile dalla funzione: $h(t) = \delta(t-s)$, dove δ rappresenta l'impulso di Dirac.

Indicando con $p(t)$ la portata di afflusso e con $q(t)$ quella di deflusso di pioggia ed assumendo uguale a zero la portata iniziale, la portata al tempo t è fornita dall'integrale di convoluzione:

$$q(t) = \int_0^t h(t-\tau)\,p(\tau)\,d\tau = \int_0^t \delta(t-s-\tau)\,p(\tau)\,d\tau$$

Il prodotto $\delta(t-s-\tau)\,d\tau$ è diverso da zero ed uguale ad uno solo quando l'argomento della funzione di Dirac si annulla, ossia quando $\tau = (t-s)$ e quindi risulta:

$q(t) = p(t-s)$

e cioè l'effetto del canale lineare è soltanto, come già detto, di ritardare l'uscita rispetto all'ingresso di un tempo costante pari ad s .

Il modello di Nash

Il modello di Nash è equivalente ad una cascata di n serbatoi lineari di identica costante di esaurimento k. La funzione IUH assume la forma

$$h(t) = \frac{1}{k(n-1)!}\left(\frac{t}{k}\right)^{n-1} \exp\left(-\frac{t}{k}\right)$$

Per ricavare l'espressione dell'IUH di Nash si consideri il primo degli n serbatoi lineari in serie. L'ingresso è costituito dall'impulso di Dirac $\delta(t)$ e pertanto l'uscita $q_1(t)$ coincide con l' IUH del modello del serbatoio lineare:

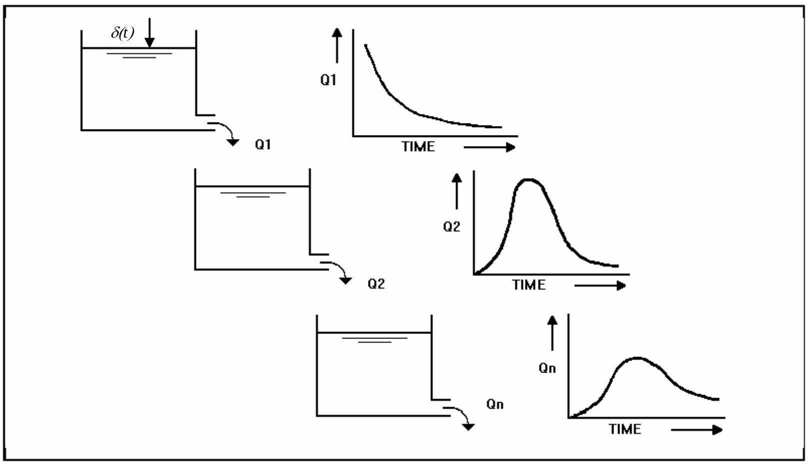
$$q_1(t) = \frac{1}{k}\exp\left(-\frac{t}{k}\right)$$

L'uscita del primo serbatoio costituisce anche l'ingresso del secondo e pertanto si può ricavare la portata in uscita $q_2(t)$ attraverso l'integrale di convoluzione:

$$q_2(t) = \int_0^t p(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t \frac{1}{k}\exp\left(-\frac{\tau}{k}\right)\frac{1}{k}\exp\left(-\frac{(t-\tau)}{k}\right)d\tau = \frac{1}{k^2}\exp\left(-\frac{t}{k}\right)\int_0^t d\tau = \frac{1}{k^2}\exp\left(-\frac{t}{k}\right)t$$

Analogamente per $q_3(t)$ si ottiene:

$$q_3(t) = \int_0^t p(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t \frac{1}{k^2}\exp\left(-\frac{\tau}{k}\right)\tau\frac{1}{k}\exp\left(-\frac{(t-\tau)}{k}\right)d\tau = \frac{1}{k^3}\exp\left(-\frac{t}{k}\right)\int_0^t \tau d\tau = \frac{1}{k^3}\exp\left(-\frac{t}{k}\right)\frac{t^2}{2}$$



L’espressione precedente rappresenta l’IUH del modello di Nash considerando tre serbatoi in serie. Generalizzando per l’uscita dell’n-esimo serbatoio si ottiene l’espressione dell’IUH ricercata.
Tale espressione può essere estesa al caso di *n* non intero, divenendo

$$h(t) = \frac{1}{k\Gamma(n)}\left(\frac{t}{k}\right)^{n-1} \exp\left(-\frac{t}{k}\right)$$

in cui $\Gamma(n)$ è la funzione gamma completa, che vale

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

Il modello della corrivazione

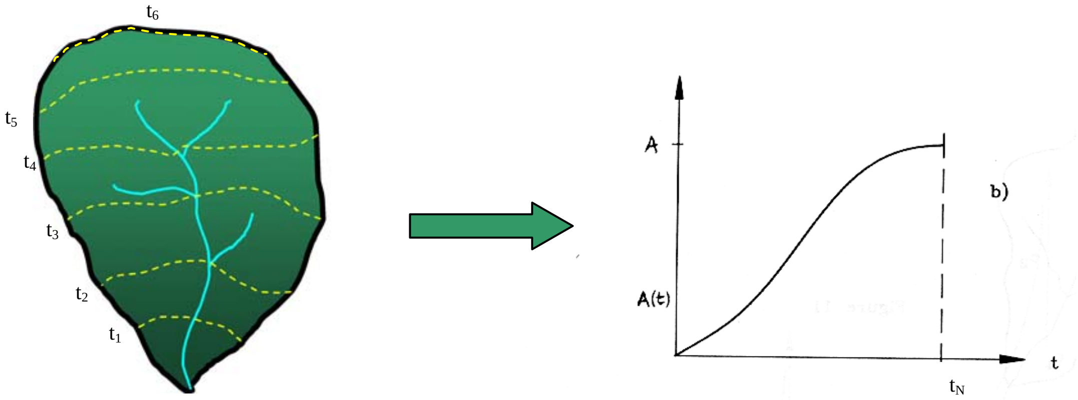
Il *metodo cinematico o metodo della corrivazione* si basa sullo schema del canale lineare. Le ipotesi su cui si basa il metodo sono le seguenti:

- la formazione della piena è dovuta unicamente ad un fenomeno di trasferimento di massa liquida;
- ogni singola goccia di pioggia si muove sulla superficie del bacino seguendo un percorso immutabile che dipende unicamente dalla posizione del punto in cui essa è caduta;
- la velocità della singola goccia non è influenzata dalla presenza di altre gocce, cioè ognuna di esse scorre indipendentemente dalle altre;
- la portata defluente si ottiene sommando tra loro le portate elementari provenienti dalle singole aree del bacino che si presentano allo stesso istante alla sezione di chiusura.

La prima delle ipotesi precedenti esclude la presenza di qualsiasi fenomeno di invaso. La seconda e terza ipotesi equivalgono ad assumere che il tempo di corrivazione di qualsiasi punto del bacino sia costante. L'ultima ipotesi, con le due precedenti, equivale ad assumere che il modello sia lineare e stazionario.
Il meccanismo di formazione delle piene così come è rappresentato dal modello cinematico, richiede l’individuazione nel bacino delle cosiddette *linee isocorrive*, ossia i punti del bacino caratterizzati dallo stesso tempo di corrivazione. Questo, per le ipotesi sopra fatte, è indipendente dai deflussi defluenti e quindi è costante per tutta la durata del fenomeno.
Si prendano in considerazione le linee isocorrive con tempo di corrivazione uguale ad un multiplo di Δt, $t_1 = \Delta t$, $t_2 = 2\Delta t, \ldots, t_N = N\Delta t$ (a t_N corrisponde il tempo di corrivazione del bacino), e indichiamo con $A(t_1)$, $A(t_2), \ldots, A(t_N)$ le aree delle porzioni di bacino caratterizzate da un tempo di

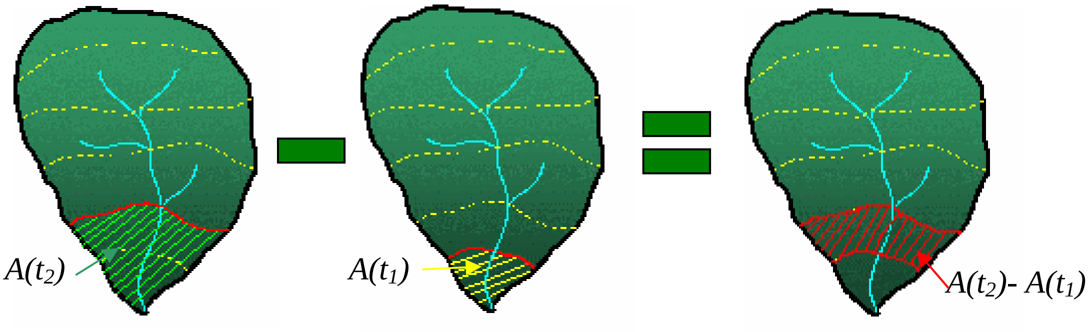
corrivazione inferiore rispettivamente a t_1, t_2, …, t_N (A_n coincide, quindi, con l'area dell'intero bacino).

Sulla base di questi dati è possibile costruire in forma discretizata la cosiddetta curva area-tempi, che ha in ascissa il tempo *t* ed in ordinata l'area *A(t)* il cui tempo di corrivazione è minore o uguale a *t*. La funzione A(t) ha un andamento monotono crescente.



Poiché si intende ricavare l'espressione dell'IUH si consideri una pioggia unitaria che istantaneamente cade sul bacino in esame. Si consideri quindi una porzione di bacino, compresa tra le isocorrive corrispondenti a t_1e t_2 , di area pari a:

$$A(t_2) - A(t_1)$$



Se sull'unità di superficie cade una pioggia pari ad $\frac{1}{A}$, con A area totale del bacino, nella zona in esame è caduto il volume di pioggia pari a:

$$\frac{1}{A}\left[A(t_2) - A(t_1)\right]$$

Tale volume di pioggia raggiunge la sezione di chiusura tra il tempo t_1 ed il tempo t_2, per cui la portata media corrispondente risulta:

$$\bar{q} = \frac{1}{A}\frac{\left[A(t_2) - A(t_1)\right]}{t_2 - t_1}$$

Per ottenere il valore di portata istantaneo, che coincide con l'IUH ricercato, si effettua il limite per $t_1 \rightarrow t_2$.

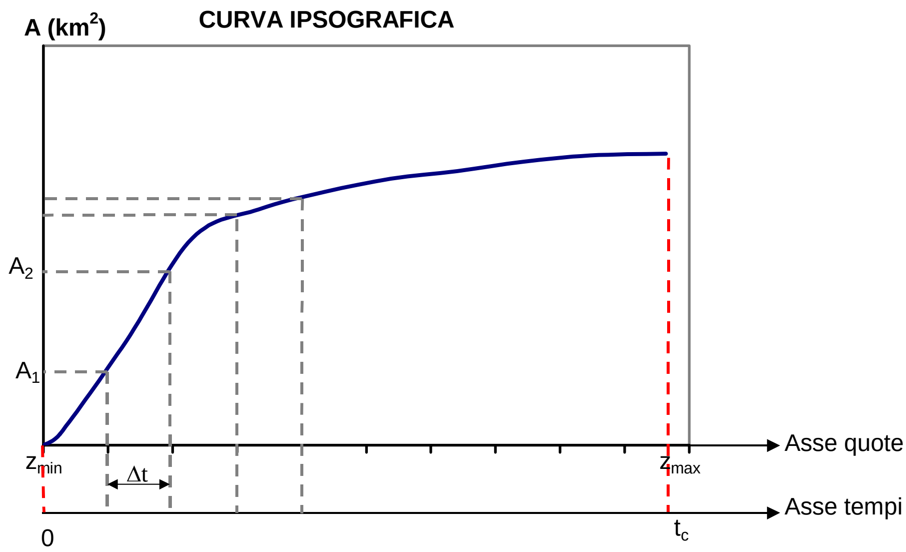
$$h(t) = \frac{1}{A}\lim_{t_2 \rightarrow t_1}\frac{A(t_2) - A(t_1)}{t_2 - t_1}$$

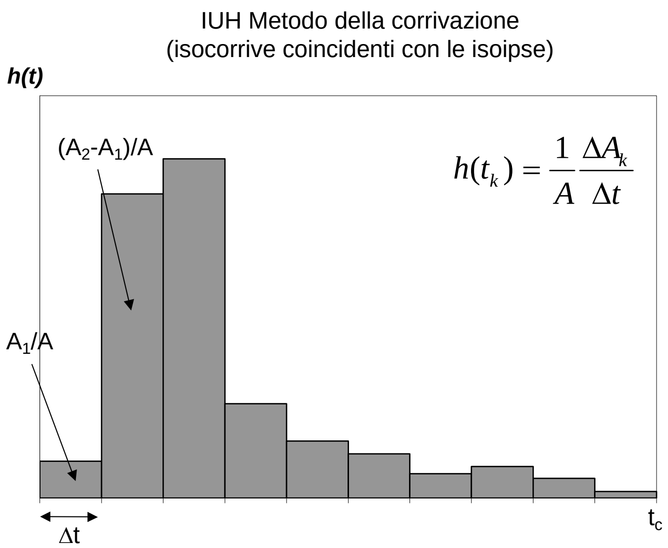
poiché l'espressione precedente è il limite del rapporto incrementale a questo si può sostituire la derivata ottenendo:

$$h(t) = \frac{1}{A}\frac{dA(t)}{dt}$$

L'applicazione del metodo della corrivazione richiede la conoscenza della **curva area-tempi** del bacino e quindi il tracciamento delle **isocorrive**, cioè delle linee che uniscono i punti del bacino con uguale tempo di corrivazione.

E' possibile considerare le **linee isocorrive coincidenti con le linee isoipse** del bacino nel presupposto che il tempo di corrivazione di ciascun punto del bacino sia proporzionale alla distanza che intercorre tra esso e la sezione di chiusura e che, in generale, a punti di quota più elevata corrispondano distanze maggiori. In tal caso la curva area-tempi viene a coincidere con la curva ipsografica.





Un secondo metodo per la costruzione della **curva area-tempi** consiste nel considerare le **isocorrive coincidenti con i livelli topologici**. Ricordando che il **livello topologico** di ogni ramo non è altro che la distanza topologia del suo nodo di monte (ovvero il numero di rami, interni ed esterni, che occorrono per arrivare allo sbocco), è possibile costruire la **funzione di ampiezza** che indica il numero di rami per un determinato livello topologico.

L'andamento dell'IUH in questo caso sarà caratterizzato dalla legge:

$$h\,(t_k) = \frac{1}{N_{tot}}\frac{\Delta N_k}{\Delta t}\,.$$

Il modello composto da più elementi semplici

Un modello concettuale delle trasformazioni operate da un bacino può essere costituito da una combinazione di elementi semplici che nello specifico coincidono con canali lineari e serbatoi lineari.

L'idrogramma unitario istantaneo del modello corrispondente all'intero sistema si può ricavare dagli idrogrammi unitari istantanei dei singoli elementi componenti. Allo scopo si possono applicare due regole generali che forniscono, rispettivamente, l'idrogramma unitario istantaneo del modello ottenuto ponendo due *elementi in serie* e quello del modello ottenuto ponendo due *elementi in parallelo*.

Consideriamo dapprima due elementi collegati in serie in modo tale che la portata uscente dal primo costituisca la portata entrante nel secondo.

Indicando con *p(t)* la portata entrante nel primo elemento e con $h_1(t)$ l'idrogramma unitario istantaneo dell'elemento, la portata uscente $q_1(t)$ risulta fornita (assumendo nulla la portata iniziale) dall'integrale di convoluzione:

$$q_1(t) = \int_0^t h_1(t-\tau)\, p(\tau)\, d\tau$$

Consideriamo ora il secondo elemento: tenendo conto che la portata entrante coincide con la portata uscente $q_1(t)$ dal primo elemento ed indicando con $h_2(t)$ l'idrogramma unitario istantaneo del secondo elemento, la portata uscente *q(t)* dall'insieme dei due elementi è fornita dall'integrale di convoluzione:

$$q(t) = \int_0^t q_1(\sigma) h_2(t-\sigma)\, d\sigma$$

e sostituendo l’espressione di $q_1(t)$ si ottiene:

$$q(t) = \int_0^t \left\{ \int_0^\sigma p(\tau) h_1(\sigma-\tau)\, d\tau \right\} h_2(t-\sigma)\, d\sigma$$

Invertendo l'ordine di integrazione risulta:

$$q(t) = \int_0^t p(\tau) \left\{ \int_\tau^t h_1(\sigma-\tau) h_2(t-\sigma)\, d\sigma \right\} d\tau$$

Indicando con *h(t)* l'idrogramma unitario istantaneo del modello composto dai due elementi in serie, si ha:

$$h(t-\tau) = \int_\tau^t h_1(\sigma-\tau) h_2(t-\sigma)\, d\sigma$$

Ponendo quindi $\sigma = (\tau + \varepsilon)$ si ottiene:

$$h(t-\tau) = \int_{\tau}^{t-\tau} h_1(\varepsilon) h_2(t-\tau-\varepsilon) d\varepsilon$$

e quindi anche:

$$h(t) = \int_{\tau}^{t} h_1(\varepsilon) h_2(t-\varepsilon) d\varepsilon$$

L'idrogramma unitario istantaneo del modello ottenuto ponendo in serie due elementi è dunque uguale all'integrale di convoluzione degli idrogrammi unitari istantanei corrispondenti.

Consideriamo ora il caso di due *elementi disposti in parallelo.*

In questo caso l'ingresso al primo sia costituito dalla frazione α_1 e l'ingresso al secondo dalla frazione α_2 della portata di afflusso $p(t)$. Ovviamente dovrà risultare: $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Le uscite confluiscono insieme costituendo quindi l'uscita complessiva $q(t)$ del modello.

Indichiamo con $q_1(t)$ e con $q_2(t)$ le portate uscenti dai due elementi:

$$q_1(t) = \int_0^t h_1(t-\tau) \alpha_1 p(\tau) d\tau$$

$$q_2(t) = \int_0^t h_2(t-\tau) \alpha_2 p(\tau) d\tau$$

risulta quindi:

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t) = \int_0^t p(\tau) \left[\alpha_1 h_1(t-\tau) + \alpha_2 h_2(t-\tau) \right] d\tau$$

Ricordando l'espressione dell'integrale di convoluzione ed indicando con $h(t)$ l'idrogramma unitario istantaneo del modello composto dai due elementi in parallelo, si può porre:

$$h(t-\tau) = \alpha_1 h_1(t-\tau) + \alpha_2 h_2(t-\tau)$$

e quindi anche:

$$h(t) = \alpha_1 h_1(t) + \alpha_2 h_2(t)$$

L'idrogramma unitario istantaneo del modello costituito da due elementi in parallelo è dunque uguale alla media pesata degli idrogrammi unitari istantanei dei componenti, con coefficienti di peso uguali ai coefficienti di ripartizione della portata entrante. La regola si può estendere immediatamente ad un numero qualsiasi di elementi in parallelo.

Metodo dei momenti

Il **metodo dei momenti** consiste nell'imporre l'uguaglianza dei momenti attorno all'asse delle ordinate dell'uscita osservata (reale-IR) e di quella (simulata-IS) risultante dalla convoluzione dell'ingresso con l'IUH.

$$\mu_R'[\ IR\ ] = \mu_R'[\ IS\ ]$$

I momenti di ordine R attorno all'origine dei tempi, normalizzati dividendo per il volume dell'afflusso V_0 , sono forniti dalle seguenti espressioni:

$$\mu_R'[\ IR\ ] = \frac{1}{V_0}\int_0^{+\infty} q(t)t^R dt$$

$$\mu_R'[\ IS\ ] = \frac{1}{V_0}\int_0^{+\infty} t^R \int_0^t h(t-\tau)p(t)d\tau \cdot dt$$

Analogamente per la pioggia si ha:

$$\mu_R'[\ P\ ] = \frac{1}{V_0}\int_0^{+\infty} p(t)t^R dt$$

con $p(t)$ = portate di afflusso (m^3/s)

Nella pratica sia gli ietogrammi che gli idrogrammi di piena risultano noti non in forma analitica, ma discreta, per cui i momenti si possono approssimare con delle sommatorie.
Per il pluviogramma (costituito da elementi rettangoli)si considera la seguente relazione:

$$\mu_R'[\ P\ ] = \frac{1}{V_0}\sum_{i=1}^{n}\left[(i-0{,}5)\Delta t\right]^R p(i)\Delta t$$

Per gli idrogrammi (costituiti da elementi trapezi) si considera una relazione analoga a quella riportata di seguito per l'idrogramma reale :

$$\mu_R'[\ IR\ ] = \frac{1}{V_0}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{q_i+q_{i+1}}{2}\cdot\Delta t\right)\cdot\left[i\Delta t+\frac{\Delta t}{3}\left(\frac{q_i+2q_{i+1}}{q_i+q_{i+1}}\right)\right]^R$$

Per i momenti dei primi due ordini valgono le seguenti relazioni:

$$\mu_1'[\ IS\ ] = \mu_1'[\ P\ ] + \mu_1'[\ IUH]$$

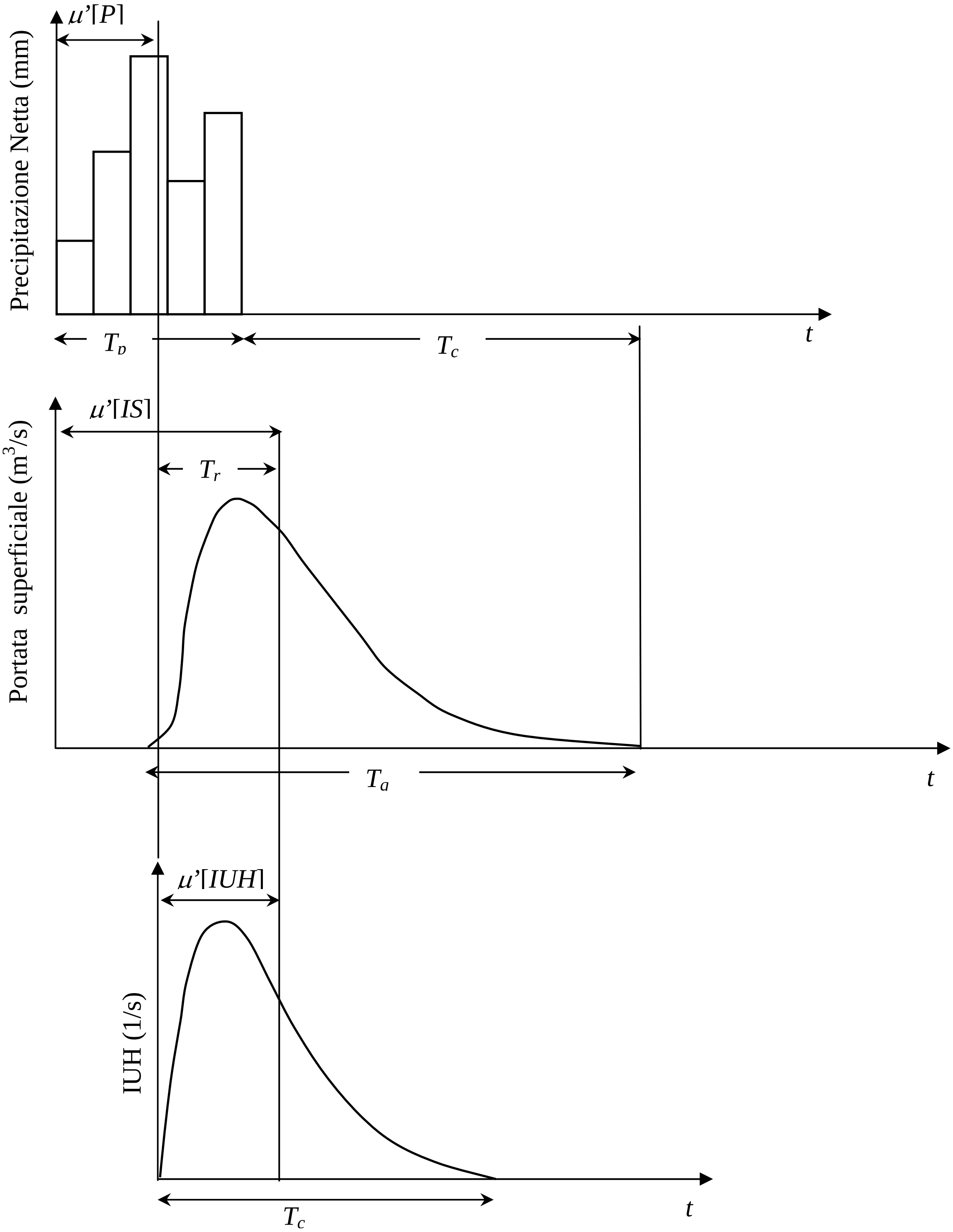
$$\mu_2'[\ IS\ ] = \mu_2'[\ P\ ] + 2\mu_1'[\ P\ ]\,\mu_1'[\ IUH] + \mu_2'[\ IUH]$$

Nelle relazioni precedenti sono incogniti sia i momenti relativi all'idrogramma unitario istantaneo sia quelli dell'idrogramma simulato. Questi ultimi per l'ipotesi del metodo possono essere sostituiti dei momenti dell'idrogramma reale che, invece, sono noti. Le relazioni precedenti diventano:

$$\mu_1'[\ IR\ ] = \mu_1'[\ P\ ] + \mu_1'[\ IUH]$$

$$\mu_2'[\ IR\ ] = \mu_2'[\ P\ ] + 2\mu_1'[\ P\ ]\ \mu_1'[\ IUH] + \mu_2'[\ IUH]$$

Dimensionalmente i momenti del primo ordine rappresentano dei tempi e sono rispettivamente le ascisse dei baricentri del diagramma *p(t)* e *q(t)*. E' possibile ricavare l'ascissa del baricentro del diagramma dell'IUH in quanto uguale alla differenza tra le ascisse dei baricentri del deflusso e dell'afflusso; per questo motivo tale grandezza si indica come **tempo di ritardo**.



Dai valori dei momenti dell'idrogramma unitario istantaneo si ricavano, infine, quelli dei parametri del modello considerato adoperando le relazioni che legano le due quantità. Per i modelli considerati vale quanto segue.

Modello del serbatoio lineare

$$\mu_1'[\,IUH] = k$$

Modello del canale lineare

$$\mu_1'[\,IUH] = s$$

Modello di Nash

$$\mu_1'[\,IUH] = nk$$

$$\mu_2'[\,IUH] = n\,(n+1)\,k^2$$

Modello della corrivazione (Isocorrive coincidenti con le isoipse)

L'applicazione del metodo della corrivazione richiede la conoscenza della **curva area-tempi** del bacino e, quindi, il tracciamento delle **isocorrive**, cioè delle linee che uniscono i punti del bacino con uguale tempo di corrivazione.
Una prima alternativa, come visto, consiste nell'assumere le **isocorrive coincidenti con le isoipse**, e nell'individuare l'area delle porzioni di bacino comprese tra successive isocorrive, ΔA_i, attraverso la curva ipsografica, suddividendo il massimo dislivello riferito alla sezione di chiusura, in n intervalli uguali.
Se sono disponibili delle osservazioni di pioggia e portata relative ad uno stesso evento, è possibile applicare il **metodo dei momenti** per ricavare l'ampiezza dell'intervallo di tempo Δt. L'applicazione del metodo dei momenti equivale ad imporre che l'IUH rispetti la relazione:

$$\mu_1'[\,IUH] = \mu_1'[\,IR\,] - \mu_1'[\,P\,] \qquad (*)$$

Il valore di Δt può essere allora stimato dalla seguente espressione:

$$\Delta t = \frac{\mu_1'[IUH]}{\mu_1^*[IUH]}$$

in cui il numeratore è noto dall'applicazione della (*), e μ_1*[IUH] è un momento del primo ordine adimensionale:

$$\mu_1^*[\,IUH] = \sum_{i=1}^{n}\left[(i-0{,}5)\frac{\Delta A_i}{A}\right]$$

L'IUH, infine, si costruisce mediante la seguente formula:

$$h\,(t_k) = \frac{1}{A}\frac{\Delta A_k}{\Delta t} \qquad k = 1, \ldots, n$$

Nel caso in cui, invece, non siano disponbili osservazioni di eventi di pioggia e portata contemporanei, è necessario ricorrere ad un metodo più approssimato per l'applicazione del modello della corrivazione. In questo caso, si procede ad una stima del tempo di corrivazione dell'intero bacino, che risulta associato al punto a quota più elevata rispetto alla sezione di chiusura, cioè al punto idraulicamente più lontano. Il **tempo di corrivazione** del bacino può essere stimato a mezzo di formule empiriche, tra cui quella di **Giandotti**:

$$t_c = \frac{4\sqrt{A} + 1{,}5L}{0{,}8\sqrt{z_m - z_0}}$$

in cui t_c è il tempo di corrivazione espresso in ore, A la superficie del bacino in km^2, L la lunghezza in km del percorso idraulicamente più lungo del bacino, z_m è la quota media del bacino, in metri, e z_m è la quota della sezione di chiusura.

Suddividendo la curva ipsografica in n intervalli uguali, è possibile ricavare le aree, ΔA_i, comprese tra successive isoipse, a cui corrisponde un $\Delta t = t_\mathrm{c}/n$. Quindi, si può procedere a costruire l'idrogramma unitario istantaneo come:

$$\mathrm{h}\,(t_\mathrm{k}) = \frac{1}{A}\frac{\Delta A_k}{\Delta t} \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Modello della corrivazione (Isocorrive coincidenti con i livelli topologici)

Le stesse due metodologie viste per il caso precedente possono essere adattate all'applicazione nel caso in cui si ipotizza che le isocorrive coincidano con i livelli topologici.

Applicando i il **metodo dei momenti** si ricava l'ampiezza dell'intervallo di tempo dell'IUH:

$$\Delta t = \frac{\mu_1^{'}[IUH]}{\mu_1^{*}[IUH]}$$

con

$$\mu_1^*[\,IUH] = \sum_{i=1}^{n}\left[(i - 0{,}5)\frac{\Delta N_i}{N_{tot}}\right].$$

In alternativa, in mancanza di osservazioni, è ancora possibile applicare il metodo della corrivazione sfruttando la stima del **tempo di corrivazione del bacino** determinata con la formula di **Giandotti**.

Suddividendo tale valore in n intervalli, presumibilmente tanti quanti sono quelli che caratterizzano la funzione d'ampiezza, si ottiene il valore $\Delta t = t_c/n$ con il quale costruire l'idrogramma unitario istantaneo.

$$h(t_k) = \frac{1}{N_{tot}} \frac{\Delta N_k}{\Delta t} \qquad k=1,2,..,n$$